

# La pseudodistance de Carathéodory sur des ouverts emboîtés

Jean-Pierre Vigué

## 1. Introduction

On considère une variété analytique complexe  $X$  de dimension finie et un ouvert  $U$  de  $X$ . Pour les pseudodistances de Carathéodory  $c_X$  et  $c_U$ , on sait que,  $\forall x, y \in U$ ,

$$c_X(x, y) \leq c_U(x, y).$$

Cependant, sous des hypothèses un peu plus fortes, nous montrerons qu'il existe une constante  $k < 1$  telle que,  $\forall x, y \in U$ ,

$$c_X(x, y) \leq kc_U(x, y).$$

En particulier, si  $X$  est  $c_X$ -hyperbolique, ce qui signifie que  $c_X$  est une distance qui définit la topologie de  $X$ , ceci entraîne que toute application holomorphe  $f : X \rightarrow X$  telle que  $f(X) \subset U$  admet un point fixe unique.

Ce même problème pour la pseudodistance intégrée de Carathéodory a déjà été étudié par H.-J. Reiffen [5], C. Earle and R. Hamilton [1] et J.-P. Vigué [6].

## 2. Rappel sur les pseudodistances invariantes

Sur le disque unité  $\Delta \subset \mathbb{C}$ , on définit la distance de Poincaré  $\omega$  par la formule : pour tous  $z$  et  $w$  appartenant à  $\Delta$ ,

$$\omega(z, w) = \tanh^{-1} \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right|.$$

Ici,  $\tanh^{-1}$  désigne l'inverse de la fonction tangente hyperbolique.

On définit alors la pseudodistance de Carathéodory  $c_X$  sur une variété analytique complexe  $X$  par la formule : pour tous  $x$  et  $y$  appartenant à  $X$ ,

$$c_X(x, y) = \sup_{\varphi \in H(X, \Delta)} \omega(\varphi(x), \varphi(y)),$$

où  $H(X, \Delta)$  désigne l'ensemble des applications holomorphes de  $X$  dans le disque-unité  $\Delta$ . Comme  $\Delta$  est homogène et que les automorphismes analytiques de  $\Delta$  sont des isométries pour  $\omega$ , on peut supposer de plus que  $\varphi(x) = 0$ .

On vérifie facilement que  $c_\Delta = \omega$  et que  $c_X$  est une pseudodistance invariante, ce qui signifie que toute application holomorphe  $f : X \rightarrow Y$  vérifie, pour tous  $x$  et  $y$  appartenant à  $X$ ,

$$c_Y(f(x), f(y)) \leq c_X(x, y)$$

et est donc contractante (au sens large)(voir [2,3 et 4]).

### 3. Lemme de convexité

On a le lemme de convexité suivant.

**Lemme 3.1.** *Soit  $r < 1$  un nombre positif. Alors, pour tout  $x \geq 0$ ,*

$$\tanh^{-1}(r \tanh(x)) \leq rx,$$

où  $\tanh$  désigne la fonction tangente hyperbolique et  $\tanh^{-1}$  son inverse.

*Démonstration.* On a :

$$(\tanh^{-1})'(x) = 1/(1 - x^2),$$

et

$$(\tanh^{-1})''(x) = 2x/(1 - x^2)^2.$$

Par suite,  $(\tanh^{-1})''(x)$  est positif pour  $x \geq 0$ , et la fonction  $\tanh^{-1}$  est convexe sur  $[0, 1[$ . On peut alors utiliser l'inégalité de convexité au point  $r \tanh(x)$  sur le segment  $[0, \tanh x]$ , et on trouve

$$\tanh^{-1}(r \tanh(x)) \leq r \tanh^{-1}(\tanh(x)) \leq rx,$$

et le résultat est démontré.

### 4. La pseudodistance de Carathéodory sur des ouverts emboîtés

Nous pouvons montrer le théorème suivant.

**Théorème 4.1.** *Soit  $X$  une variété analytique complexe. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  borné pour la pseudodistance de Carathéodory  $c_X$ . Soit  $M = \sup_{x \in U, y \in U} c_X(x, y)$  et soit  $k = \tanh M < 1$ . Alors, pour tout  $x \in U$ , pour tout  $y \in U$ ,*

$$c_X(x, y) \leq k c_U(x, y).$$

*Démonstration.* Remarquons que  $k = 0$  signifie que  $\forall x \in U, \forall y \in U, c_X(x, y) = 0$ , et le résultat est évident. On peut donc supposer  $k > 0$  et soit  $x$  un point de  $U$ . Soit  $f : X \rightarrow \Delta$  une application holomorphe telle que  $f(x) = 0$ . Du fait que  $f$  est contractante pour la pseudodistance de Carathéodory, on déduit que,  $\forall y \in U$ ,

$$c_\Delta(f(x), f(y)) \leq c_X(x, y) \leq M.$$

Par suite,  $|f(y)| \leq \tanh M = k < 1$ .

On en déduit que la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(z) = (1/k)f(z)$  envoie  $U$  dans le disque-unité  $\Delta$ . Ceci implique que

$$c_U(x, y) \geq c_\Delta((1/k)|f(x)|, (1/k)|f(y)|),$$

$$c_U(x, y) \geq \tanh^{-1}((1/k)|f(y)|).$$

En prenant la borne supérieure pour toutes les applications holomorphes  $f : X \rightarrow \Delta$  telles que  $f(x) = 0$ , on trouve

$$c_U(x, y) \geq \tanh^{-1}((1/k)\tanh c_X(x, y)).$$

Par suite,

$$\tanh c_U(x, y) \geq (1/k)\tanh c_X(x, y)$$

et

$$\tanh^{-1}(k\tanh c_U(x, y)) \geq c_X(x, y).$$

D'après le lemme 3.1, on a  $kc_U(x, y) \geq c_X(x, y)$ , et le théorème est démontré.

En particulier, si  $U$  est relativement compact dans  $X$ , alors  $U$  est borné pour  $c_X$ . On peut donc utiliser le théorème précédent et on a le corollaire suivant.

**Théorème 4.2.** *Soit  $X$  une variété analytique complexe. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  relativement compact dans  $X$ , soit  $M = \sup_{x \in U, y \in U} c_X(x, y)$  et soit  $k = \tanh M < 1$ . Alors, pour tout  $x \in U$ , pour tout  $y \in U$ ,*

$$c_X(x, y) \leq kc_U(x, y).$$

On en déduit le corollaire 4.3.

**Corollaire 4.3.** *Soit  $X$  une variété  $c_X$ -hyperbolique et soit  $f : X \rightarrow X$  une application holomorphe telle que  $f(X)$  soit relativement compact dans  $X$ . Alors la suite des itérées  $f^n$  converge, pour la topologie compacte ouverte vers une application constante  $z \mapsto b$ , où  $b$  est l'unique point fixe de  $f$ .*

*Démonstration.* On déduit facilement du fait que  $f(X)$  est relativement compact dans  $X$  qu'il existe un ouvert  $U$  relativement compact dans  $X$  tel que  $f(X) \subset U \subset X$ . Comme  $f$  envoie  $X$  dans  $U$ , on a, pour tout  $x \in X$ , pour tout  $y \in X$ ,

$$c_U(f(x), f(y)) \leq c_X(x, y).$$

D'après le théorème 4.2, il existe une constante  $k < 1$  telle que

$$c_X(f(x), f(y)) \leq kc_U(f(x), f(y)).$$

On trouve alors

$$c_X(f(x), f(y)) \leq kc_X(x, y).$$

En utilisant ce résultat pour  $y = f(x)$ , et en itérant, on en déduit que, pour tout  $n > 0$ ,

$$c_X(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq k^n c_X(x, f(x)).$$

De façon tout à fait classique, on en déduit que, pour tout  $a \in X$ , la suite des itérées  $(f^n(a))$  est une suite de Cauchy pour  $c_X$  sur  $\overline{f(X)}$  qui est compact. Elle converge donc vers  $b$  qui est l'unique point fixe de  $f$ .

## Bibliographie

1. C. Earle and R. Hamilton. A fixed point theorem for holomorphic mappings. Proc. Symposia Pure Math., **16** (1970), 61–65.

2. T. Franzoni and E. Vesentini. Holomorphic maps and invariant distances. *Notas de Matematica [Mathematical Notes]*, **69**. North-Holland Publishing Co, Amsterdam, 1980.
3. M. Jarnicki and P. Pflug. Invariant distances and metrics in complex analysis. *de Gruyter Expositions in Mathematics*, **9**, Walter de Gruyter Co, Berlin, 1993.
4. S. Kobayashi. Hyperbolic complex spaces, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, **318**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
5. H.-J. Reiffen. Die Carathéodorysche Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik. *Math. Ann.* **161** (1965), 315–324.
6. J.-P. Vigué. Distances invariantes et points fixes d’applications holomorphes. *Bull. Sci. Math.* **136** (2012), 12–18.

Jean-Pierre Vigué  
 Université de Poitiers  
 Mathématiques  
 SP2MI, BP 30179  
 86962 FUTUROSOCPE  
 e-mail : [vigue@math.univ-poitiers.fr](mailto:vigue@math.univ-poitiers.fr)  
 ou [jp.vigue@orange.fr](mailto:jp.vigue@orange.fr)